Expressões Algébricas e Polinômios

Classificação, Monômios, Operações e Divisão Algébrica

1 Expressões Algébricas e Monômios

Em diversas situações no estudo da Matemática e das Engenharias, é conveniente denotar números reais arbitrários por meio de letras (variáveis), possibilitando manipular algebricamente quantidades mesmo antes de conhecer seus valores numéricos exatos.

Define-se como **expressão algébrica** todo resultado de um número finito de operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) efetuadas sobre variáveis e números reais, desde que tais operações sejam bem definidas em $\mathbb{R}$.

1.1 Classificação das Expressões Algébricas

As expressões algébricas são classificadas segundo a natureza das operações às quais as variáveis estão submetidas:

- **Racionais Inteiras:** Não apresentam variáveis no denominador nem sob radicais. Exemplo: $E(x, y) = 3x^2 - \frac{5}{2}y^3$.
- **Racionais Fracionárias:** Apresentam variáveis no denominador. Exemplo: $F(x) = \frac{x+1}{x-2}$, definida para $x \neq 2$.
- **Irracionais:** Apresentam variáveis sujeitas à operação de radiciação. Exemplo: $G(x) = \sqrt{x+1}$, definida para $x \geq -1$.

1.2 Monômios e Operações Elementares

Um **monômio** é uma expressão algébrica obtida pelo produto de um número real não nulo (denominado **coeficiente**) por uma sequência finita de potências de variáveis com expoentes inteiros não negativos (denominada **parte literal**).

O **grau de um monômio** corresponde à soma dos expoentes de todas as variáveis contidas na sua parte literal. Dois ou mais monômios são ditos **semelhantes** quando possuem rigorosamente a mesma parte literal.

Exemplo 1 – Operações com Monômios
Considere os monômios $M_1 = 5ab^2$ e $M_2 = -4a^2b^3c^2$:

a) **Multiplicação:** $(5ab^2) \cdot (-4a^2b^3c^2) = (5 \cdot (-4)) \cdot (a \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b^3) \cdot c^2 = -20a^3b^5c^2$.

b) **Divisão:** Para $m, n, p \neq 0$, $\frac{45m^8n^7p^3}{9m^3n^2p} = \left(\frac{45}{9}\right) m^{8-3}n^{7-2}p^{3-1} = 5m^5n^5p^2$.

2 Representação e Estrutura dos Polinômios

Define-se como **polinômio** em uma variável real x toda expressão algébrica dada pela soma finita de monômios da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ são os coeficientes numéricos do polinômio e $n \in \mathbb{N}$.

Se $a_n \neq 0$, o expoente n define o **grau do polinômio**, denotado por ∂P ou $\text{gr}(P)$. Quando o coeficiente do termo de maior grau for unitário ($a_n = 1$), o polinômio é dito **mônico**. Se todos os coeficientes forem nulos ($a_n = \cdots = a_0 = 0$), o polinômio é **identicamente nulo** ($P \equiv 0$), não se definindo grau para este caso.

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são ditos **idênticos** ($P \equiv Q$) se, e somente se, os coeficientes de seus termos correspondentes de mesmo grau forem idênticos. Um número real k é denominado **raiz** ou zero de $P(x)$ se $P(k) = 0$.

Exemplo 2 – Raízes de um Polinômio
Os números reais $x = 2$ e $x = 5$ são raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 7x + 10$, pois:

$$P(2) = 2^2 - 7(2) + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$$

$$P(5) = 5^2 - 7(5) + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$$

3 Operações Fundamentais com Polinômios

3.1 Adição, Subtração e Multiplicação

- **Adição e Subtração:** Efetuam-se adicionando ou subtraindo os coeficientes dos termos de mesmo grau. O grau do polinômio resultante satisfaz a desigualdade $\partial(P \pm Q) \leq \max\{\partial P, \partial Q\}$.
- **Multiplicação:** Multiplica-se cada termo de $P(x)$ por todos os termos de $Q(x)$, reduzindo os monômios semelhantes. O grau do produto satisfaz a igualdade $\partial(P \cdot Q) = \partial P + \partial Q$.

Exemplo 3 – Multiplicação de Polinômios
Efetue o produto de $P(x) = x^2 - 2x + 4$ por $Q(x) = -2x + 2$:

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^2 - 2x + 4)(-2x + 2)$$

$$= x^2(-2x + 2) - 2x(-2x + 2) + 4(-2x + 2)$$

$$= -2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 4x - 8x + 8 = -2x^3 + 6x^2 - 12x + 8$$

4 Divisão de Polinômios e Algoritmo da Divisão

A divisão entre dois polinômios fundamenta-se na existência e unicidade de dois polinômios característicos, conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 1 – Algoritmo da Divisão (Euclidiana) Dados os polinômios $A(x)$ (dividendo) e $B(x) \neq 0$ (divisor), existem únicos polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto) tais que:

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

satisfazendo a condição de parada: $\partial R < \partial B$ ou $R(x) \equiv 0$.

4.1 Método da Chave

O procedimento prático para determinar $Q(x)$ e $R(x)$ consiste em:

1. Ordenar dividendo e divisor em ordem decrescente segundo as potências de x.
2. Preencher com coeficientes nulos os termos ausentes do dividendo.
3. Dividir o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor, obtendo um termo de $Q(x)$.
4. Multiplicar esse termo pelo divisor, inverter os sinais dos resultados e subtrair do dividendo.
5. Repetir o ciclo até obter um resto parcial cujo grau seja estritamente menor que ∂B.

Exemplo 4 – Aplicação do Método da Chave
Determine o quociente e o resto da divisão de $A(x) = 5x^4 - 4x^2 + 3x - 1$ por $B(x) = x^2 - 3x + 4$.
Solução: Organizando os termos no dispositivo da chave e preenchendo o termo faltante $0x^3$:

$$\begin{array}{rl|l} 5x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 3x - 1 & & x^2 - 3x + 4 \\ \cline{3-3} -(5x^4 - 15x^3 + 20x^2) & & 5x^2 + 15x + 21 \quad \leftarrow Q(x) \text{ (Quociente)} \\ \cline{1-1} 15x^3 - 24x^2 + 3x - 1 & & \\ -(15x^3 - 45x^2 + 60x) & & \\ \cline{1-1} 21x^2 - 57x - 1 & & \\ -(21x^2 - 63x + 84) & & \\ \cline{1-1} \mathbf{6x - 85} & \leftarrow R(x) \text{ (Resto)} & \end{array}$$

Portanto, o quociente obtido é $Q(x) = 5x^2 + 15x + 21$ e o resto é $R(x) = 6x - 85$. Como $\partial R = 1 < 2 = \partial B$, o algoritmo é encerrado.

Referências Bibliográficas

[1] PARENTE, Ulisses Lima; NETO, Antonio Caminha M. **Módulo de Expressões Algébricas e Polinômios – Parte 1**. Portal da Matemática OBMEP.

[2] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio: Volume 3**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.